

Tipps zur Serie 8:

Aufgabe 8.1:

- Orthogonalität und Orthogonalprojektion
repetieren & anwenden (Theorie 8)

e) Benützt die Schwarz'sche Ungleichung

f) Definition der Einheitsvektoren betrachten

Aufgabe 8.2:

a) Überlegt euch, was die Monombasis vom P_2 (Achtung: Achtet auf die Definition des P_2 für diese Aufgabe) ist, und überlegt für jedes Basiselement, was die Anwendung von L_2 bewirkt (der Ausgang der Abb. ist immer ein 2-D Vektor, wie ihr in der Aufgabenstellung seht).

b) Einfach die Legendre Polynome in die Definition des Skalarproduktes auf diesem VR stecken.

c) Entweder gleich wie in a) vorgehen, oder aber einen Basiswechsel vollführen.

d) Betrachtet auch $d=1$ und schreibt eure Lösung in Abhängigkeit von d .

e) Zeigen, dass B_{Kern} im Kern enthalten ist:
Zeigt, dass $L_d(p_i)$ für alle Basisvektoren in $B_{\text{Kern}} = 0$ ist (findet eine allgemeine Formel, könnt's ja nicht für alle zeigen).

Zeigen, dass alle Basisvektoren linear unabhängig sind: Das ist Tricky, stellt die Matrix auf, welche das lineare Gleichungssystem beschreibt, welches für lineare Unabhängigkeit nur die triviale Lösung haben darf. Darin müsst ihr ein Muster erkennen (Es wäre eine $d+1 \times d-1$ -Matrix, ihr könnt nicht alles aufschreiben), so, dass ihr die Matrix durch systematisches addieren von Zeilen vereinfachen könnt. Ihr müsst schlussendlich in der Lage sein, zu zeigen, dass wirklich nur die triviale Lösung stimmt.

f) Ihr habt in b) gezeigt, dass die 3 Legendre-Polynome orthonormal zueinander stehen, daraus folgt direkt (aufgrund der Dimension des \mathcal{P}_2), dass diese eine orthonormale Basis des \mathcal{P}_2 bilden.

Jede Orthogonalprojektion bzgl. dieser Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{P_0, P_1, P_2\}$ ist also wie folgt gegeben:

$$P_{\mathcal{P}_2[-1,1]}(p) = \sum_{i=0}^2 \langle p, P_i \rangle P_i = ?$$

Eure Aufgabe ist es jetzt, für die allg. Vektoren die 3 Projektionen mittels dem Skalarprodukt zu bestimmen und diese dann in die obige Summe zu einem allg. Resultat zusammzusetzen.

Aufgabe 8.3:

a) Stellt erst die Matrix D sauber auf und berechnet das Ergebnis des Skalarproduktes allgemein.

Überprüft mit diesem Ergebnis dann die Axiome des Skalarproduktes. Achtung: Hier könnt ihr $x^T D x > 0 \quad \forall x$ nicht einfach annehmen!

b) Schaut in der Theorie die Definition der induzierten Norm nach.

d) Überlegt euch, welche Vektoren ggü. dieser Norm die Länge 1 haben. Bildet erst die Achsen ab.

e) Einfach die beiden Bedingungen an Skalarprodukt & Norm für einen allgemeinen Vektor aufstellen.

Aufgabe 8.4:

- Einfach dem Kochrezept im Skript folgen

b) Eigenschaften einer orthonormalen Basis ausnutzen (Matrix B wird orthogonal sein). Formt den gegebenen Ausdruck zu einer Matrixmultiplikation um.

d) Ähnliches Prinzip zur Householdermatrix / zum Gram-Schmidt orthonormalisierungsverfahren, einfach wollt ihr auf die Ebene projizieren, nicht daran spiegeln. Für Gram-Schmidt ist es ein Teilschritt.